

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

1,00...

Remarque préliminaire :

- *Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.*
- *Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.*

Exercice 1

Loi de l'équilibre génétique lors de l'appariement au hasard - Loi de Hardy-Weinberg

Certains gènes peuvent avoir deux états : A (allèle dominant) ou a (allèle récessif).

Les couples de gènes sur des paires de chromosomes n'ayant pas forcément les mêmes allèles, un individu donné peut avoir l'un des trois génotypes suivants :

AA ou Aa ou aa

Lors d'un appariement entre deux individus, l'enfant récupère un allèle de chacun de ses deux parents.

Exemples :

Si un parent a le génotype AA et l'autre Aa, l'enfant sera du type AA ou Aa avec des probabilités égales à $\frac{1}{2}$.

Si un parent a le génotype Aa et l'autre Aa, l'enfant sera du type AA ou Aa ou aa avec des probabilités égales à $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ respectivement.

On note p_n , q_n et m les proportions des génotypes AA, Aa, aa de la génération n .

1) À l'aide d'un arbre ou d'un tableau à deux entrées, faire apparaître tous les cas possibles d'appariements et les génotypes de l'enfant qui en découlent.

2) En déduire les proportions p_{n+1} , m_{n+1} puis q_{n+1} en fonction de p_n , q_n et m .

3) On note $a = p_0 - r_0$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_n - m = a$

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de p_{n+1} , m_{n+1} puis q_{n+1} en fonction du seul paramètre a .

En déduire que pour $n \geq 1$, les suites (p_n) , (q_n) et (m) sont constantes.
Ce résultat est connu sous le nom de "loi de l'équilibre génétique de Hardy-Weinberg". Ainsi, quelles que soient les proportions initiales des trois génotypes, la répartition est stabilisée dès la génération suivante.

Exercice 2

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe. Un salarié malade est toujours absent et la première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.

- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité de 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité de 0,24.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par E_n l'événement « le salarié est absent pour cause de maladie la n^{e} semaine ». On note p_n la probabilité de l'événement E_n . On a ainsi $p_1 = 0$.

- 1) a. Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité. OK
- b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la seconde semaine. OK
- 2) a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, représenter la situation entre la n^{e} semaine et la $(n+1)^{\text{e}}$ semaine par un arbre. OK
- b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2 p_n + 0,04$.
- c. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$p_n = 0,05 - 0,05 * 0,2^{n-1}$$
- d. Déterminer alors la limite de la suite (p_n) OK

Exercice 3

Partie A :

Résoudre l'inéquation $2\ln(x) \geq \ln(2) + \ln(4-x)$

Partie B :

On étudie la fonction $h(x) = 2x^2 - \ln(x)$ définie sur $]0; +\infty[$

$$\ln a^b = b \ln a$$

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b)$$

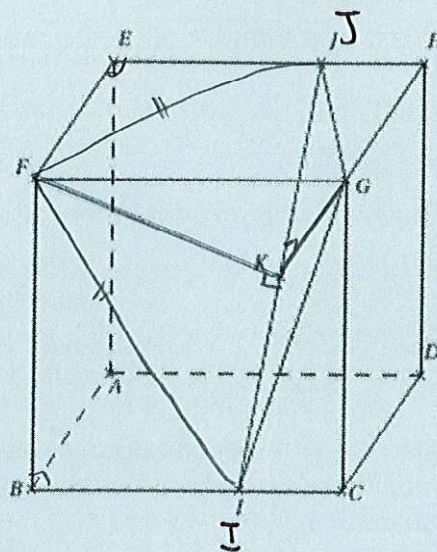
1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

2) Démontrer que $h'(x) = \frac{4x^2 - 1}{x}$, pour tout $x \in]0; +\infty[$, puis déterminer le signe de $h'(x)$.

En déduire le tableau de variation de la fonction h .

3) Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 1.

Exercice 4



On donne la propriété suivante :

« par un point de l'espace il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée »

Sur la figure on a représenté le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

On a placé :

- les points I et J tels que $\vec{BI} = \frac{2}{3} \vec{BC}$ et $\vec{EJ} = \frac{2}{3} \vec{EH}$

- le milieu K de $[IJ]$

On appelle P le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ)

Partie A :

1) Démontrer que le triangle FIJ est isocèle en F

En déduire que les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales

On admet que les droites (GK) et (IJ) sont orthogonales

2) Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK)

3) Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGP)

4) a. Montrer que les points F , G , K et P sont coplanaires

b. En déduire que les points F , P , et K sont alignés.

Partie B :

L'espace est rapporté au repère orthogonal $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

On appelle N le point d'intersection de la droite (GP) et du plan (ADB)

1) Donner les coordonnées des points F , G , I et J .

2) Montrer que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ) .