J. 19 1820

DIRECTION GÉNÉRALE DES
FINANCES PUBLIQUES

CONCOURS EXTERNE
DE CONTRÔLEUR DES FINANCES PUBLIQUES DE DEUXIÈME CLASSE

ANNÉE 2020

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2

Durée : 3 heures - Coefficient : 3

Le candidat traitera le présent sujet correspondant à l'option formulée dans son dossier d'inscription :

– Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.

Recommandations importantes
Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.
Sous peine d'annulation, en dehors du volet rabattable d'en-tête, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tels que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro ou toute autre indication, même fictive, étrangère au traitement du sujet.
Sur les copies, les candidats devront écrire et souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre de couleur noire ou bleue uniquement. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.
Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ACTION
ET DES COMPTES PUBLICS

Tournez la page S.V.P.

DIRECTION GÉNÉRALE DES FINANCES PUBLIQUES

SUJET

MATHÉMATIQUES

Les candidats et candidates peuvent avoir à leur disposition sur la table de concours, le matériel d'écriture, une règle, des surligneurs.

Les candidats et candidates sont autorisés à utiliser les matériels et documents suivants :
- *les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;*
- *les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen » ;*

Sont interdits*, l'usage des téléphones portables ainsi que les montres et/ou tout autres objets et accessoires connectés ainsi que l'utilisation de toute documentation.*

Ce sujet comporte cinq exercices, indépendants les uns des autres.

Vous traiterez l'ensemble des exercices dans l'ordre choisi.

EXERCICE 1

Les parties A, B et C sont indépendantes.

ln détermine toujours le logarithme népérien

Partie A

Soit f(x) la fonction définie telle que $f(x) = \ln(1/(2-x))$

a) Déterminez D_f correspondant à l'ensemble de définition de f
b) Prouvez que f est croissante sur D_f
c) Démontrez que l'image par f de l'intervalle I = [-2 ;0] est incluse dans I

Partie B

Déterminez :

a)

$$\lim_{x \to +\infty} : \frac{Y^x}{x^Y} \qquad \text{avec } Y = x^x$$

Tournez la page S.V.P.

b) Une primitive de $\sin^2(x/2) / (x - \sin x)$

c) Une primitive de $\ln(x+1)$

Partie C

Soit $f(x) = (ax + b) \exp^{(-x+1)}$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, exp définissant la fonction exponentielle et f définie sur $[0,4]$

a) Calculez f' de f (f' dérivée de f)
b) Sachant que $f'(1) = 1$ et $f'(3/2) = 0$, déterminez a et b
c) Étudiez le sens de variation de f
d) Tracez la courbe C de f
e) Tracez T_1 et T_2 les deux tangentes connues grâce à b)
f) Déduisez graphiquement la solution $f(x) = 0$
g) Résolvez l'équation $f(x) = 0$

EXERCICE 2

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies telles que :

Quelque soit $n \in \mathbb{N}$

$u_0 = 3$ $\quad$ $v_0 = 4$
$u_n = 2u_{n+1} - v_n$ $\quad$ $v_n = 2v_{n+1} - u_{n+1}$

1) Calculez u_1, u_2, v_1 et v_2

2) Soit $w_n = v_n - u_n$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$

a) Montrez que w_n est une suite géométrique et déterminez sa raison

b) Déterminez la limite de w_n

3) Étudiez $u_{n+1} - u_n$ et $v_{n+1} - v_n$

Que peut-on en déduire ?

4) Soit t_n la suite constante définie telle que $t_n = (u_n + 2v_n) / 3$

Déterminez la limite de u_n et v_n.

EXERCICE 3

Dans un concours administratif, trois options pour l'écrit sont possibles : mathématiques, français et comptabilité.

On sait que 37 % des candidats ont choisi les mathématiques et que 25 % ont pris le français.

Parmi tous les candidats, 21 % des candidats ont choisi les mathématiques et ont obtenu leur concours.

Parmi tous les candidats, 32,5 % des candidats ont choisi la comptabilité et ont obtenu le concours.

Enfin, parmi les candidats ayant opté pour le français, 27,5 % ont échoué.

Soit les événements suivants :

M = Le candidat a choisi les mathématiques
C = Le candidat a choisi la comptabilité
F = Le candidat a choisi le français
R = Le candidat a réussi le concours

Tous les résultats seront arrondis au millième.

1) Convertissez les informations numériques présentées sous forme de pourcentage en termes de probabilité, donc sous la forme P (événement) = ….

On interroge au hasard un candidat.

2) a) Calculez la probabilité que ce candidat ait choisi la comptabilité P (C)
   b) Calculez la probabilité que ce candidat ait choisi le français et en plus qu'il ait eu le concours. (Soit $p(F \cap R)$)

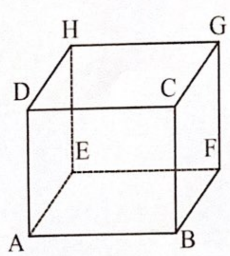
3) Quelle est la probabilité pour que ce candidat ait échoué en ayant pris le français. (Soit $p(F \cap \overline{R})$)
4) Le candidat n'a pas eu son concours et avait pourtant choisi les mathématiques. Quelle était sa probabilité (Soit $p_M(\overline{R})$) ?
5) Déterminez le pourcentage de réussite au concours (Soit p(R))
6) On répète de façon indépendante, trois tirages successifs d'un candidat. On interroge le candidat sur sa réussite ou son échec éventuel.
   a) Construisez l'arbre pondéré.
   b) Quelle est la probabilité qu'au moins un d'entre eux ait obtenu le concours ?
   c) Quelle est la probabilité qu'exactement deux d'entre eux l'ait obtenu ?
   d) Enfin, quelle est la probabilité pour qu'ils soient tous lauréats ?

EXERCICE 4

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Soit le cube suivant :



Tournez la page S.V.P.

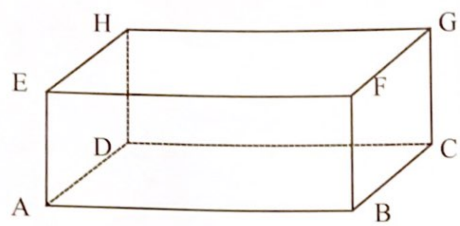
De plus I et J sont deux point tels que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{AJ} = ½\,\overrightarrow{AB}$.
Enfin K est le Milieu de [GZ] sachant que Z est le Milieu de [GF]

a) Reproduisez la figure en incluant tous les points de A à K, on prendra comme échelle [AB] = 4 cm

b) Soit L = (IJ) $\cap$ (CB), tracez le point L

Partie B

Soit le parallélépipède suivant :



Et I milieu de [BF]

a) Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont-ils coplanaires ? Justifiez.
b) Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{HE}$ sont-ils coplanaires ? Justifiez.

EXERCICE 5

Résolvez dans $\mathbb{R}$

1) $1 - x > \sqrt{(x^2 + x)}$

2) $| x - 1 | < 1 - 2\,|x - 3|$

3) $\ln (x^2 + x - 2) > \ln (-x^2 + 3x/4 - 1/8)$ (ln étant le logarithme népérien)

4) Démontrez que pour tout x y, tels que $x + y > 0$ on a $\dfrac{xy}{x+y} \leq \dfrac{x+y}{4}$

5) Sachant que pour tout $x \in [I,J]$ o a $2x^2 - 5x + 3 \leq 3x - 3$
Trouvez I et J (I et J $\in \mathbb{N}$)