

Sujet Osuano 2007

Exo 2: "Etude de fonctions"

Partie A:

Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x + 1 + \ln(x)$

1) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α .

b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B:

On considère la fonction f définie par $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4x \ln x}{x+1} \text{ pour } x \in]0; +\infty[\text{ et } f(0) = 0$$

1) a) Montrer que f est continue en 0.

b) f est-elle dérivable en 0 ?

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$

3) a) Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2} f(x)$

b) Montrer que $f(\alpha) = -4\alpha$

c) Dresser le tableau de variation de f .

Partie C:

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et T la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

1) Donner une équation de T .

2) On considère la fonction p définie sur $]0; +\infty[$ par $p(x) = f(x) - 2(x-1)$

a) Montrer que $p''(x) = f''(x) = \frac{4h(x)}{(x+1)^2}$ où h est définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = -x + \frac{1}{x} - 2 \ln x$.

b) Calculer $h'(x)$ et en déduire le sens de variation de h .

Calculer $h(1)$ et en déduire le signe de $h(x)$, puis le signe de $p''(x)$.