Partie B

Dans une fête foraine, un organisateur dispose de 2 sacs de 30 boules chacune.

Les boules sont indiscernables au toucher et ont la même probabilité d'être tirées.

Le S_1 sac numéro 1 comprend 27 boules blanches et 3 boules rouges.

Le S_2 sac numéro 2 comprend 21 boules blanches et 9 boules rouges.

La règle du jeu est la suivante :

– Le joueur mise 1 € et tire une boule dans le S_1 qu'il remet ensuite dans le S_1.
– Si la boule est rouge alors le joueur tire une boule dans le S_2 et note la couleur et s'arrête là.
– Si la boule est blanche il tire une boule dans le S_1 et note la couleur et s'arrête là.

Soit A et B les événements :
A : « Les deux boules tirées sont rouges »
B : « Une seule des boules tirées est rouge »

1) Déterminez $p(A)$ et $p(B)$ (Vous pourrez vous aider d'un arbre pondéré)

Si les deux boules obtenues sont rouges alors le joueur reçoit 10 €, si une seule boule est rouge il reçoit 2 € sinon il perd sa mise.

X désigne alors la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

2) Déterminez la loi de probabilité de X.

3) En déduire l'espérance mathématique de X. Qu'en déduisez-vous ?

Soit n un entier naturel supérieur à 2, le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes.

4) Démontrez que la probabilité p_n qu'il pioche au moins une fois dans le sac S_2 est de la forme $p_n = 1 - \alpha^n$. Vous déterminerez α.

5) Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0{,}9$?

EXERCICE 4

1) Résolvez l'inégalité suivante : $\ln(x^2 - 5x - 14) \geq \ln(2x^2 - 10x + 8)$

2) Déterminez une primitive de la fonction suivante :

$k(x) = 6 \sin(2x) \cos^3(2x)$ sur $\mathbb{R}$

3) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln x - x$