CONCOURS EXTERNE POUR L'EMPLOI
D'INSPECTEUR STAGIAIRE DU TRÉSOR PUBLIC

=====

ANNÉE 2010

=====

ÉPREUVE N° 3 À OPTION

Durée : **3 heures** - Coefficient : **4**

=====

COMPOSITION SUR UN OU PLUSIEURS SUJETS DONNÉS ET/OU UN CAS PRATIQUE

D'ANALYSE ÉCONOMIQUE

(Page 2)

OU

UN OU PLUSIEURS CAS PRATIQUES DE

GESTION COMPTABLE ET ANALYSE FINANCIÈRE

(Page 3)

OU

UN OU PLUSIEURS EXERCICES DE

MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUE

(Page 9)

=====

Toute note inférieure à **6/20 est éliminatoire.**

TRÈS IMPORTANT :

Le candidat traitera celui des trois sujets ci-après qui correspond à l'option qu'il a choisie lors de son inscription au concours : CE CHOIX NE PEUT PAS ÊTRE MODIFIÉ.

Sous peine d'annulation de leur copie, les candidats ne doivent porter aucun signe distinctif (nom, prénom, lieu, etc.) sur la partie réservée à la rédaction.

Les candidats ne peuvent quitter la salle moins d'une heure après le début des épreuves.

Tournez la page S.V.P.

Les candidats sont autorisés à utiliser des calculatrices électroniques à fonctionnement autonome, sans imprimante, à entrée unique par clavier.

L'utilisation de tout document est interdite.

EXERCICES DE MATHEMATIQUES ET STATISTIQUE

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul et tout réel x strictement positif, on pose

$$F_n(x) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + x^2)^n}.$$

1) On admet que F_n est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que sa dérivée vérifie :

$$F'_n(x) = \int_0^{\infty} \frac{\partial(f_n(x,t))}{\partial x}\,dt.$$

Montrer que pour tout $x \in \,]0\,;+\infty[$ $F'_n(x) = -2nxF_{n+1}(x)$.

2) Calculer F_1.

(on pourra calculer dans un premier temps $\int_0^{A} \frac{dt}{(t^2 + x^2)}$ puis faire tendre A vers $+\infty$).

3) a) Montrer par récurrence que F_n est de la forme

$$F_n(x) = a_n x^{1-2n}$$

où a_n est un réel qui vérifie une relation de récurrence que l'on précisera.

b) En déduire la valeur de $F_n(x)$ pour tout n entier naturel non nul et pour tout x réel strictement positif.

Exercice 2

Soient f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3(1-x^2)}.$$

Tournez la page S.V.P.

1) a) Montrer que f est positive sur l'intervalle [0 ; 1[.

b) Montrer que g est négative sur l'intervalle [0 ; 1[.

c) En déduire :

$$0 \leq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x \leq \frac{x^3}{3\left(1-x^2\right)} \text{ pour tout } x \text{ de } [0\ ;\ 1[.$$

d) Montrer que pour tout entier naturel n non nul

$$0 \leq \frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

(On pourra considérer la suite $(x_n)_n$ de terme général $x_n = 1/(2n+1)$ et utiliser le résultat de la question précédente).

2) On considère les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies pour n > 0 par :

$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!} \text{ et } b_n = a_n e^{\frac{1}{12n}}.$$

a) Montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes.

b) On désigne par l leur limite commune. Justifier que l est strictement positif.

c) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique réel

$$\alpha_n \in]0\ ;\ 1[\text{ tel que } \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}l = e^{\frac{\alpha_n}{12n}}.$$

d) En déduire que $n! = \frac{1}{l}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{\alpha_n}{12n}}$.

3) a) Montrer, en utilisant la formule de Wallis, que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

(Rappel de la formule de Wallis : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\frac{2^2.4^2...(2n)^2}{1^2.3^2...(2n-1)^2} = \pi$).

b) En déduire que $l = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

(On pourra considérer la suite des termes d'indice pair extraite de la suite $(a_n)_n$).

Exercice 3

Un système S est constitué de trois éléments S_1, S_2 et S_3.

S est en panne si soit S_1 est en panne, soit S_2 et S_3 sont en panne.

Si S_2 ou S_3 (un seul) est en panne, S fonctionne à rendement réduit. Les pannes sont indépendantes. On dira que S fonctionne lorsque S n'est pas en panne.

On appelle $F_i = \{ S_i \text{ fonctionne}\}_{i=1,\,2 \text{ ou } 3}$

$1 - P(F_1) = 0{,}1$

$1 - P(F_2) = 0{,}3$

$1 - P(F_3) = 0{,}2$

1) Calculer la probabilité pour que S fonctionne.

2) Calculer la probabilité pour que S fonctionne à rendement réduit sachant que S fonctionne.

3) Calculer la probabilité pour que S_1 soit en panne sachant que S est en panne.

Exercice 4

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

2) Montrer que pour la plus grande valeur propre, il existe un vecteur propre (x_0, y_0, z_0) tel que $0 \le x_0 \le 1$, $0 \le y_0 \le 1$, $0 \le z_0 \le 1$ et $x_0 + y_0 + z_0 = 1$.

3) On considère les valeurs propres dans l'ordre décroissant. Ecrire alors la matrice diagonale B semblable à A obtenue et montrer qu'une matrice de passage P est :

$$P = \begin{pmatrix} x_0 & 1 & 3 \\ y_0 & 0 & 1 \\ z_0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

On admettra par la suite que :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

4) **a)** Trouver la limite de B^n quand n tend vers l'infini.

b) En déduire la limite de A^n quand n tend vers l'infini. Que dire des vecteurs colonnes de cette matrice ?

5) Résoudre le système d'équations défini par :

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$