

ANNÉE 2010

---

**ÉPREUVE N° 3**

DURÉE : 3 heures. - COEFFICIENT : 5

---

*Le candidat traitera obligatoirement celui des six sujets correspondant à l'option formulée dans sa demande d'admission à concourir.*

---

Il trouvera ces sujets aux pages suivantes du présent fascicule :

Page 3 : Option Analyse économique ;  
Page 4 : Option Gestion comptable et analyse financière ;  
Page 11 : Option Mathématiques.

**Recommandations importantes**

*Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie informatisée.*

*Sous peine d'annulation de sa copie, le candidat ne devra porter aucun signe distinctif (nom, prénom, signature, numéro de candidature, etc.) en dehors du volet rabattable d'en-tête.*

*Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.*

**Tournez la page S.V.P.**

**Le candidat devra compléter l'intérieur du volet rabattable des informations demandées et se conformer aux instructions données**

Après avoir servi l'en-tête, rabattre et coller le cache

Code centre d'examen

Concours : **externe**  
(interne ou externe - affectation régionale ou nationale)

Pour l'emploi de : **Inspecteur-élève généraliste des impôts**

Épreuve n° **3**

Matière : **Indiquer le code-matière et son libellé**

Date **15 | 10 | 2009**

Nombre d'intercalaires supplémentaires :

**Vérifier la codification du centre d'examen**

**Préciser éventuellement le nombre d'intercalaires supplémentaires**

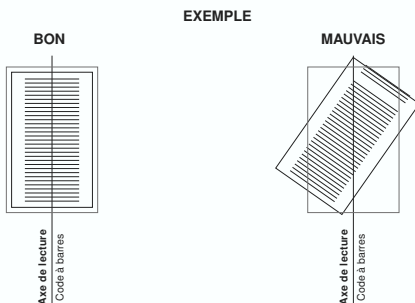
**À L'ATTENTION DU CANDIDAT**

En dehors du cadre prévu à cet effet, il est interdit de signer sa copie ou de mettre un signe distinctif.

Les étiquettes d'identification ne doivent être détachées et collées dans les deux cadres prévus qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.

**POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES**

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres doit traverser la totalité des barres de ce code.



NOTE/20

20	19	18	20	19	18
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
17	16	15	17	16	15
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
14	13	12	14	13	12
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
11	10	09	11	10	09
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
08	07	06	08	07	06
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
05	04	03	05	04	03
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
02	01	00	02	01	00
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
25	50	75	25	50	75
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

NOTE/20

Numéro du correcteur

Numéro de copie

Numéro de copie

**EN AUCUN CAS, LE CANDIDAT NE FERMERA LE VOLET RABATTABLE AVANT D'Y AVOIR ÉTÉ AUTORISÉ PAR LA COMMISSION DE SURVEILLANCE**

## MATHÉMATIQUES

### Code-matière 030

*Un ou plusieurs problèmes*

*L'usage de la calculatrice est autorisé.*

**Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.**

*Les cinq exercices sont indépendants*

#### -I-

Soient  $p$  et  $q$  deux nombres réels tels que  $q \neq 0$ . On souhaite déterminer les nombres complexes  $z$  tels que  $z^2 = p + iq$

1. Montrer que si  $z = x + iy$  alors 
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = p \\ 2xy = q \end{cases}$$
2. En déduire que  $4x^4 - 4px^2 - q^2 = 0$ , puis résoudre cette équation.
3. En déduire les deux valeurs possibles pour  $x$ .
4. Conclure.

#### -II-

Soit  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times, \cdot)$  l'algèbre des matrices à deux lignes et à deux colonnes et à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

On considère le sous ensemble  $\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. Démontrer que  $\mathcal{G}$  est stable pour la somme et le produit matriciel.
2. Démontrer que  $(\mathcal{G}, +)$  est un groupe commutatif.
3. Démontrer que  $(\mathcal{G}, +, \times)$  est un anneau commutatif pour le produit de matrices.
4. Démontrer que tous les éléments non nuls de  $\mathcal{G}$  sont inversibles pour la loi produit, puis que  $\mathcal{G}$  est stable par l'application  $\begin{pmatrix} \mathcal{G} & \rightarrow & \mathcal{G} \\ g & \mapsto & g^{-1} \end{pmatrix}$ . En déduire que  $(\mathcal{G}, +, \times)$  est un corps commutatif.

#### -III-

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres entiers relatifs. On notera  $a \wedge b = \text{PGCD}(a, b)$  le plus grand commun diviseur des nombres  $a$  et  $b$ .

1. Démontrer que pour tout couple  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ , il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $au + bv = k(a \wedge b)$ .
2. Montrer que  $\frac{a}{a \wedge b}$  et  $\frac{b}{a \wedge b}$  sont premiers entre eux. Que peut-on en déduire d'après le théorème de Bézout ?
3. En déduire qu'il existe  $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $au_0 + bv_0 = a \wedge b$ .
4. Comparer les ensembles  $\{au + bv \mid (u, v) \in \mathbb{Z}^2\}$  et  $\{k(a \wedge b) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

**Tournez la page S.V.P.**

**-IV-**

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$f(x) = x^2 \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right|$$

1. Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de la fonction  $f$
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur son ensemble de définition. Calculer, lorsqu'elle est définie, la dérivée de  $f$ .
3. Démontrer que  $f$  peut être prolongée par continuité en 0. Étudier la dérivabilité en 0 de ce prolongement, noté  $\bar{f}$ .
4. Déterminer les variations de  $\bar{f}$  sur  $\mathcal{D}_f \cup \{0\}$ . Préciser les extrema locaux de  $\bar{f}$ .
5. Étudier les limites de  $\bar{f}$  aux bords de son ensemble de définition.
6. Démontrer que  $\mathcal{C}_{\bar{f}}$ , courbe représentative de  $\bar{f}$  dans un repère orthonormé, possède une asymptote verticale en 1 et une asymptote oblique en  $\pm\infty$ .

**-V-**

On souhaite résoudre l'équation suivante :

$$\frac{d^2x}{dx^2} + m^2x = \cos(nt) \text{ où } m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

1. Résoudre l'équation sans second membre.
2. Trouver une solution particulière de l'équation avec second membre.
3. Déterminer les solutions générales de l'équation avec second membre.

FIN