

**CONCOURS EXTERNE DE CONTRÔLEUR
STAGIAIRE DU TRÉSOR PUBLIC**

ANNÉE 2008

ÉPREUVE N°3 À OPTION

Durée : 3 heures – Coefficient : 4

UN OU PLUSIEURS PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES	PAGE 2
OU	
RÉDACTION D'UNE OU PLUSIEURS NOTES D'HISTOIRE ET/OU DE GÉOGRAPHIE	PAGE 5
OU	
UN OU PLUSIEURS EXERCICES DE COMPTABILITÉ GÉNÉRALE	PAGE 6

Toute note inférieure à 6/20 est ÉLIMINATOIRE

TRÈS IMPORTANT :

Le candidat traitera celui des trois sujets ci-après qui correspond à l'option qu'il a choisie lors de son inscription au concours : CE CHOIX NE PEUT PLUS ÊTRE MODIFIÉ.

Sous peine d'annulation de leur copie, les candidats ne doivent porter aucun signe distinctif (nom, prénom, lieu, etc.) sur la partie réservée à la rédaction.

Les candidats ne peuvent quitter la salle moins d'une heure après le début des épreuves.

Tournez la page S.V.P.

UN OU PLUSIEURS PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

Les candidats sont autorisés à utiliser les documents et matériels suivants :

- Calculatrices électroniques y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, à entrée unique par clavier, sans imprimante ;
- Règles de calcul ;
- Tables de logarithme ne comportant aucune formule algébrique, géométrique ou trigonométrique.

Les cinq exercices sont à traiter.

EXERCICE N°1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^{*+} par : $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$.

1 – Étudier les limites de $f(x)$ en 0 et en $+\infty$, et de $f(x) - x$ en $+\infty$.

2 – Calculer $I = \int_2^3 \left(\frac{\ln x}{x^2} \right) dx$ en utilisant l'intégration par partie.

3 – En déduire l'aire de la partie délimitée par C , la courbe représentant $f(x)$, la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

4 – Représenter graphiquement cette aire dans un repère orthonormé (échelle 3 cm par unité).

EXERCICE N°2

Chacun des 10 mots de la phrase « rien ne sert de courir, il faut partir à point » est inscrit sur un carton. On suppose les cartons indiscernables au toucher, et on les place dans une urne.

On tire au hasard un carton (les tirages sont donc supposés équiprobables).

Si le mot inscrit sur le carton contient une voyelle, on gagne 10 points.

Si le mot inscrit sur le carton contient deux voyelles, on perd 20 points.

Si le mot inscrit sur le carton contient trois voyelles, on gagne 20 points.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de points obtenus (positif ou négatif).

- 1 – Déterminer la loi de probabilité de X.
- 2 – Calculer l'espérance mathématique de X et l'écart type de X.
- 3 – On dit que le jeu est équitable si l'espérance mathématique est nulle.
Sans changer les gains obtenus pour les mots contenant une ou trois voyelles, quelle devrait être la perte pour un mot contenant deux voyelles dans un jeu équitable ?

EXERCICE N°3

On définit la suite (U_n) par :

- son terme initial $U_0 = 5$
- la relation de récurrence : $5 U_{n+1} = U_n + 4$

- 1 – Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité graphique : 2,5cm)
 - a) Tracer les droites (d) et (d') d'équations respectives $y = x$ et $5y = x + 4$.
 - b) Construire à l'aide de (d) et de (d') les points de l'axe $(O ; \vec{i})$ d'abscisses respectives U_0, U_1, U_2, U_3 .
 - c) Que peut-on prévoir quant à la convergence de la suite (U_n) ?
- 2 – (V_n) est la suite définie pour tout n par : $V_n = U_n - 1$.
 - a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera.
 - b) Exprimer V_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (V_n) quand n tend vers $+\infty$.
- 3 – Exprimer U_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (U_n) quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE N°4

Un constructeur de moteurs fabrique pour la « Formule 1 » des moteurs de compétition. La probabilité qu'un de ces moteurs soit exempt de défaut, et par suite ne « casse » pas lors d'un Grand Prix, est de **0,8**.

On dira pour simplifier qu'un tel moteur est « bon » et on notera **B** l'évènement : « le moteur est bon ».

Avant chaque Grand Prix, un contrôle très sévère, mais non infaillible, est effectué sur chaque moteur : il déclare « utilisable » ou « non utilisable » chacun de ces moteurs.

Ce contrôle permet de détecter 80 % des moteurs qui présentent un défaut, mais il désigne à tort comme ayant un défaut 5 % des « bons » moteurs. Dans chacun de ces deux cas, les moteurs sont déclarés « non utilisables » ; dans le cas contraire, ils sont déclarés « utilisables ».

Les moteurs déclarés « non utilisables » par le contrôle ne participent pas au Grand Prix. Les moteurs déclarés « utilisables » participent au Grand Prix.

On note **U** l'évènement : « le contrôle déclare le moteur utilisable ».

Notation : si **E** est un évènement, on notera \overline{E} l'évènement contraire.

Tournez la page S.V.P.

1 – a) Calculer la probabilité des événements suivants :

V : « le moteur est bon et il est déclaré utilisable » ;

W : « le moteur a un défaut et il est déclaré utilisable ».

En déduire la probabilité de U.

b) Montrer que la probabilité qu'un moteur soit bon, sachant qu'il est déclaré utilisable, est de 0,95.

2 – Au cours d'une saison (16 Grands Prix), ces moteurs sont montés **après contrôle** sur des voitures de course. On s'intéresse aux moteurs montés sur une voiture déterminée. Au début de chaque Grand Prix, on utilise un nouveau moteur, et l'on admet que les choix des moteurs sont indépendants les uns des autres.

a) Quelle est la probabilité pour que les 16 moteurs soient « bons » ?

b) Quelle est la probabilité pour que seulement 2 moteurs « cassent » ?

c) Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des moteurs « casse » ?

d) Quel est le nombre moyen de moteurs cassés auxquels on peut s'attendre, au cours d'une saison ?

EXERCICE N°5

On se propose de calculer l'intégrale : $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx$.

1 – Calculer les deux intégrales :

$$A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx,$$

$$B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx.$$

2 – Déterminer trois nombres réels a , b et c tels que pour tout nombre réel t positif ou nul on ait :

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2} \quad (1).$$

3 – En posant $t = e^x$ dans l'égalité (1), calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx.$$

4 – a) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer J en fonction de I .

b) En déduire la valeur de J . A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de J à 10^{-2} près.