

**CONCOURS EXTERNE DE CONTRÔLEUR
STAGIAIRE DU TRÉSOR PUBLIC**

ANNÉE 2007

ÉPREUVE N°3 A OPTION

Durée : 3 heures – Coefficient : 4

UN OU PLUSIEURS PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

PAGE 2

OU

**RÉDACTION D'UNE OU PLUSIEURS NOTES D'HISTOIRE ET/OU
DE GÉOGRAPHIE**

PAGE 6

OU

UN OU PLUSIEURS EXERCICES DE COMPTABILITÉ GÉNÉRALE

PAGE 7

Toute note inférieure à 6/20 est ÉLIMINATOIRE

TRÈS IMPORTANT :

Le candidat traitera celui des trois sujets ci-après qui correspond à l'option qu'il a choisie lors de son inscription au concours : CE CHOIX NE PEUT PLUS ÊTRE MODIFIÉ.

Sous peine d'annulation de leur copie, les candidats ne doivent porter aucun signe distinctif (nom, prénom, lieu, etc.) sur la partie réservée à la rédaction.

Les candidats ne peuvent quitter la salle moins d'une heure après le début des épreuves.

Tournez la page S.V.P.

UN OU PLUSIEURS PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

Les candidats sont autorisés à utiliser les documents et matériels suivants :

- Calculatrices électroniques y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, à entrée unique par clavier, sans imprimante ;
- Règles de calcul ;
- Tables de logarithme ne comportant aucune formule algébrique, géométrique ou trigonométrique.

Les cinq exercices sont à traiter.

EXERCICE N° 1

Un tiroir contient, pêle-mêle, cinq paires de chaussures noires, trois paires de chaussures vertes et deux paires de chaussures rouges.

Toutes les paires de chaussures sont de modèles différents.

Dans toutes les questions, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1 – On tire simultanément deux chaussures au hasard et on admet l'équi-probabilité de chaque tirage.

- Calculer la probabilité de l'événement A « Tirer deux chaussures de la même couleur ».
- Calculer la probabilité de l'événement B « Tirer un pied gauche et un pied droit ».
- Calculer la probabilité de l'événement C « Tirer les deux chaussures d'un même modèle ».

2 – On ne conserve plus dans le tiroir qu'une paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges. On tire, successivement et sans remise, une chaussure du tiroir jusqu'à ce que le tiroir soit vide. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.

- Déterminer les différentes valeurs de X.
- Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

EXERCICE N° 2

Depuis qu'il est à la retraite, un homme tond sa pelouse tous les samedis ; il recueille chaque fois 120 litres de gazon qu'il stocke dans un bac à compost.

Chaque semaine, les matières stockées perdent, par décomposition ou prélèvement, les trois quarts de leur volume.

Soit V_1 , V_2 et V_3 le volume total en litres stocké après les premier, deuxième et troisième samedis.

De manière générale, soit V_n le volume stocké le $n^{\text{ième}}$ samedi après la tonte.

1 – a) Calculer V_1 , V_2 et V_3 .

b) Calculer les volumes V_4 , V_5 et V_6 exprimés en litres, stockés respectivement les 4^{ème}, 5^{ème} et 6^{ème} samedis après la tonte.

2 – Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n .

3 – On définit pour tout $n \geq 1$ t_n par : $t_n = 160 - V_n$.

a) Montrer que t_n est une suite géométrique de raison r , déterminer r et calculer son premier terme t_1 .

b) En déduire les expressions de t_n puis de V_n en fonction de n .

c) Déterminer la limite de t_n puis celle de V_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE N° 3

Clément va acheter du pain à la boulangerie à quelques minutes de la fermeture de celle-ci. Il ne reste plus que 26 pains de 4 catégories différentes aux tarifs suivants :

- 8 pains au levain au tarif unitaire de 1,60 euro
- 7 pains d'antan au tarif unitaire de 1,20 euro
- 6 pains de campagne au tarif unitaire de 1 euro
- 5 pains tradition au tarif unitaire de 0,80 euro

Clément demande à la vendeuse de mettre les pains dans des sacs.

1 – Quelle est la probabilité d'obtenir un sac de 4 pains contenant au moins un pain au levain ?

2 – Quelle est la probabilité d'obtenir un sac de 4 pains contenant au moins un pain au levain et un pain d'antan ?

3 – Quelle est la probabilité d'obtenir un sac de 4 pains contenant au moins un pain au levain, un pain d'antan et un pain de campagne ?

4 – Quelle est la probabilité d'obtenir un sac de 3 pains dont le coût total est de 3,60 euros ?

5 – Quelle est la probabilité d'obtenir un sac de 4 pains différents sachant que la vendeuse a déjà mis dans le sac un pain d'antan et un pain au levain ?

6 – Quelle est la probabilité d'obtenir 4 pains identiques en prenant 4 pains au hasard ?

EXERCICE N° 4

Etude de la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = 2x^2 + e^{-x}$.

I- Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = 4x - e^{-x}$.

Tournez la page S.V.P.

- 1 – Etudier le sens de variation de g .
- 2 – Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0, 1]$ tel que $g(\alpha) = 0$
- 3 – Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près à l'aide d'une calculatrice.
- 4 – Etudier le signe de $g(x)$ sur $[0, +\infty[$.

II- Etude et représentation graphique de la fonction f .

- 1 – Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.
- 2 – Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative C de f au point d'abscisse 0.
- 3 – Soit la parabole P représentant la fonction p définie sur \mathbb{R} par $p(x) = 2x^2$.

Etudier :

- a) Le signe de $f(x) - p(x)$ sur $[0, +\infty[$.
 - b) La limite, lorsque x tend vers $+\infty$, de $f(x) - p(x)$.
 - c) Interpréter graphiquement ces deux derniers résultats.
- 4 – Représenter dans un repère orthogonal (unités graphiques : 10 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées) la courbe C représentant f , la parabole P et la tangente à C au point d'abscisse 0.

III- Calcul d'aire.

On se propose de déterminer l'aire $A(a)$ de la partie de plan contenant les points $M(x, y)$ tels que :

$$0 \leq x \leq a \quad 2x^2 \leq y \leq 2x^2 + e^{-x}$$

où a est un nombre positif donné.

- 1 – Calculer $A(a)$ en cm^2 .
- 2 – Quelle est la limite de $A(a)$ lorsque a tend vers l'infini ?

EXERCICE N° 5

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}} \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx$$

1 – Calcul de I :

Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$

- a) Calculer la dérivée de la fonction $x \rightarrow \sqrt{x^2 + 2}$
- b) En déduire la dérivée f' de f .
- c) Calculer la valeur de I .

2 –Calcul de J et de K :

- a) Vérifier que $J + 2 I = K$.
- b) A l'aide d'une intégration par partie portant sur l'intégrale K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$
- c) En déduire les valeurs de J et de K.