

CONCOURS EXTERNE
DE CONTRÔLEUR STAGIAIRE DU TRÉSOR PUBLIC

ANNÉE 2002

ÉPREUVE N°3 A OPTION

Durée : 3 heures – Coefficient : 4

UN OU PLUSIEURS PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

PAGE 2

Toute note inférieure à 6/20 est ÉLIMINATOIRE

TRÈS IMPORTANT :

Le candidat traitera celui des trois sujets ci-après qui correspond à l'option qu'il a choisie lors de son inscription au concours : CE CHOIX NE PEUT PAS ÊTRE MODIFIÉ.

Sous peine d'annulation de leur copie, les candidats ne doivent porter aucun signe distinctif (nom, prénom, lieu, etc.) sur la partie réservée à la rédaction.

Tournez la page S.V.P.

UN OU PLUSIEURS PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

Les candidats sont autorisés à utiliser les documents et matériels suivants :

- Calculatrices électroniques y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, à entrée unique par clavier, sans imprimante ;
- Règles de calcul ;
- Tables de logarithme ne comportant aucune formule algébrique, géométrique ou trigonométrique.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats devront justifier tous leurs résultats et détailler leurs calculs pour y parvenir.

EXERCICE N°1

www.devenez-fonctionnaire.fr www.devenez-fonctionnaire.fr www.devenez-fonctionnaire.fr...

Chacun des 10 mots de la phrase : « rien ne sert de courir, il faut partir à point » est inscrit sur un carton. On suppose que les cartons sont indiscernables au toucher et on les place dans une urne.

On tire au hasard un carton.

Si le mot inscrit contient une seule voyelle, on gagne 10 points.

Si le mot inscrit contient deux voyelles, on perd 20 points.

Si le mot inscrit contient trois voyelles, on gagne 20 points.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de points obtenus (positif ou négatif).

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2) Calculer l'espérance mathématique de X et l'écart type de X .
- 3) Quelle serait la signification d'une espérance mathématique nulle ?
- 4) Sans changer les gains obtenus pour les mots contenant une ou trois voyelles, quelle devrait être la perte pour un mot contenant deux voyelles pour obtenir une espérance mathématique nulle ?

EXERCICE N°2

Un propriétaire propose à partir du 1^{er} janvier 2003 un appartement dont le loyer annuel initial s'élève à 30 000 euros.

Le taux d'augmentation de ce loyer est de 3 % par an.

On désigne par P_n le montant annuel du loyer pour l'année (2003 + n) ; on a donc $P_0 = 30\,000$.

- 1) Calculer P_1 et P_2 .

- 2) Montrer que (P_n) est une suite géométrique ; déterminer sa raison. Exprimer P_n en fonction de n .
- 3) Quel sera le montant annuel du loyer en 2018, arrondi à l'euro près ?
- 4) En quelle année le loyer dépassera-t-il le double du loyer initial ?
- 5) Quelle sera la somme perçue par le propriétaire au terme des vingt premières années (on donnera la valeur arrondie au millier d'euros) ?

EXERCICE N°3

Partie A

Soit la fonction $p(x)$ définie dans \mathbb{R} par $p(x) = e^x + x + 1$.

- 1) Étudier le sens de variation de p et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
- 2) Montrer que l'équation $p(x) = 0$ a une solution et une seule (α) ,
et que l'on a : $-1,28 < \alpha < -1,27$.
- 3) En déduire le signe de $p(x)$ sur \mathbb{R} .

Partie B

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$ et sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan (unité graphique : 2 cm ou 2 carreaux de la copie).

- 1) Montrer que $f'(x) = \frac{e^x p(x)}{(e^x + 1)^2}$
En déduire le sens de variation de f .
- 2) Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
- 3) Soit T la tangente à (C) au point d'abscisse 0. Donner une équation de T et étudier la position de (C) par rapport à T .
- 4) Chercher les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à D .
- 5) Faire le tableau de variation de f .
- 6) Tracer sur un même dessin (C) , T et D . La figure demandée fera apparaître les points de (C) dont les abscisses appartiennent à $[-2 ; 4]$.

Partie C

On considère la fonction g , définie sur $[0 ; 1]$ par : $g(x) = \ln(1 + e^x)$.

On note (L) la courbe représentative de g dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, I le point défini par $OI = \vec{i}$,
A le point d'abscisse 0 de (L) et B son point d'abscisse 1.

- 1) Étudier les variations de g .
- 2) Donner une équation de la tangente en A à (L) .
- 3) On note P l'intersection de cette tangente avec le segment $[IB]$.
Calculer les aires des trapèzes OIPA et OIBA.
- 4) On admet que la courbe (L) est située entre les segments $[AP]$ et $[AB]$. Montrer alors que :
$$\ln 2 + \frac{1}{4} \leq \int_0^1 g(x) dx \leq \ln \sqrt{2(1+e)}$$
- 5) Au moyen d'une intégration par parties, on obtient $\int_0^1 f(x) dx = \ln(1+e) - \int_0^1 g(x) dx$

En déduire un encadrement de $\int_0^1 f(x) dx$.

www.devenez-fonctionnaire.fr www.devenez-fonctionnaire.fr www.devenez-fonctionnaire.fr...

EXERCICE N°4

Montrer que les droites D1, D2 et D3 d'équations respectives :

$$7x - 2y = 0$$

$$3x - y = -1$$

$$\text{et } 8x - 3y + 5 = 0$$

passent par un même point, et préciser ce point.