

CONCOURS EXTERNE
DE CONTRÔLEUR STAGIAIRE DU TRÉSOR PUBLIC

ANNÉE 2001

ÉPREUVE N°3 A OPTION

Durée : 3 heures - Coefficient : 4

UN OU PLUSIEURS PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

PAGE 2

Toute note inférieure à 6/20 est ÉLIMINATOIRE

TRÈS IMPORTANT :

Le candidat traitera celui des trois sujets ci-après qui correspond à l'option qu'il a choisie lors de son inscription au concours : CE CHOIX NE PEUT PAS ÊTRE MODIFIÉ.

Sous peine d'annulation de leur copie, les candidats ne doivent porter aucun signe distinctif (nom, prénom, lieu, etc.) sur la partie réservée à la rédaction.

Tournez la page S.V.P.

UN OU PLUSIEURS PROBLEMES DE MATHEMATIQUES

Les candidats sont autorisés à utiliser les documents et matériels suivants :

- Calculatrices électroniques à fonctionnement autonome, à entrée unique par clavier, sans imprimante ;
- Règles de calcul ;
- Tables de logarithme ne comportant aucune formule algébrique, géométrie ou trigonométrie.

Les cinq exercices sont à traiter. Les candidats devront justifier tous leurs résultats et détailler leurs calculs pour y parvenir.

EXERCICE N°1

www.devenez-fonctionnaire.fr www.devenez-fonctionnaire.fr www.devenez-fonctionnaire.fr...

On considère la suite réelle (U_n) définie par son premier terme $U_0 = 2$

et par la relation de récurrence : $U_{n+1} = \frac{(4U_n + 3)}{(U_n + 2)}$ pour tout n de \mathbb{N} .

- 1) Calculer les cinq premiers termes de cette suite.
- 2) Démontrer que l'on a $U_n > 0$ pour tout n de \mathbb{N} .
- 3) Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{(U_n - 3)}{(U_n + 1)}$ est une suite géométrique.
- 4) Calculer U_n en fonction de n .
- 5) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle on a : $|U_n - 3| < 10^{-3}$.

EXERCICE N° 2

Soit la fonction $h(x) = \frac{7x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 4x + 4}$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- 1) Montrer que $h(x)$ peut s'écrire sous la forme $h(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)} + \frac{d}{(x-2)^2}$
où a , b , c et d sont des réels à déterminer.
- 2) Donner une primitive de $h(x)$ sur $] -\infty, 2 [$.
- 3) Calculer $\int_{-1}^1 h(x) dx$.

EXERCICE N°3

L'objectif de cet exercice est de déterminer le prix d'équilibre d'un produit (on rappelle que le prix d'équilibre d'un produit est obtenu lorsque l'offre et la demande sont égales.)

Une étude faite sur ce produit a donné les résultats suivants (le prix au kilogramme est exprimé en euros et les quantités offre et demande sont exprimées en milliers de kilogrammes).

Prix proposé	x_i	0,30	0,35	0,45	0,65	0,80	1
Demande	y_i	6,25	4,90	3,75	2,75	2,40	2,25
Offre	z_i	1,25	1,30	1,30	1,50	1,55	1,60

www.devenez-fonctionnaire.fr www.devenez-fonctionnaire.fr www.devenez-fonctionnaire.fr...

Tous les résultats numériques seront donnés en valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près.

- 1) Le plan (P) est rapporté au repère orthogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 10 cm (ou 10 carreaux de la copie) pour un euro en abscisse et 2 cm (ou 2 carreaux de la copie) pour un millier de kilogrammes en ordonnée.

Représenter sur le même graphique les nuages de points associés respectivement aux séries statistiques (x_i, y_i) et (x_i, z_i) .

2) Étude de la demande

La forme du nuage de points associés à la série (x_i, y_i) permet d'envisager un ajustement exponentiel de y en x . On pose donc $Y_i = \ln y_i$.

- a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, Y_i) . Un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de Y en x est-il satisfaisant ? Pourquoi ?
- b) Donner une équation de la droite de régression de Y en x sous la forme $Y = ax + b$. En déduire, en utilisant l'égalité $Y = \ln y$, une estimation de la demande y en fonction de x prix au kilogramme.

3) Étude de l'offre

La forme du nuage de points associés à la série (x_i, z_i) permet d'envisager un ajustement affine de z en x .

- a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, z_i) . Un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de z en x est-il satisfaisant ? Pourquoi ?
- b) Donner une équation de la droite de régression de z en x sous la forme $z = mx + p$.

4) Étude graphique du prix d'équilibre

On considère, dans la suite de l'exercice, que la demande et l'offre sont respectivement formalisées par les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0, 2]$ par $f(x) = e^{-1,41x + 2,08}$ et $g(x) = 0,53x + 1,10$.

- a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, 2]$ et dresser son tableau de variation.

- b) Sur le graphique élaboré à la question 1), tracer les courbes représentatives des fonctions f et g .
- c) Déterminer graphiquement le prix d'équilibre du produit.

5) Étude numérique du prix d'équilibre

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0, 2]$ par $h(x) = f(x) - g(x)$

- a) Déterminer le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0, 2]$ et dresser son tableau de variation.
- b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[0, 2]$ une solution unique x_0 . Donner une valeur approchée décimale à 10^{-1} près de x_0 .
- c) Quel est le prix d'équilibre du produit concerné ?

www.devenez-fonctionnaire.fr www.devenez-fonctionnaire.fr www.devenez-fonctionnaire.fr...

EXERCICE N°4

Une boîte renferme 9 chevaux de bois, portant chacun un numéro de 1 à 9.

- 1) Un premier joueur effectue 3 tirages successifs d'un cheval, sans remise de la pièce de bois tirée. Les chevaux restant dans la boîte ont la même probabilité d'être tirés.
- a) Quelle est la probabilité pour que les numéros figurant sur les trois chevaux tirés constituent, dans l'ordre, une suite géométrique croissante ?
- b) Quelle est la probabilité pour que les numéros figurant sur les trois chevaux tirés constituent, dans l'ordre, une suite arithmétique décroissante ?
- 2) Un deuxième joueur se présente. Il effectue quatre tirages avec remise du cheval tiré. Il y a toujours équiprobabilité de tirer chaque cheval.
- a) Quelle est la probabilité pour qu'aucun des chevaux tirés ne porte un numéro multiple de 2 ?
- b) Quelle est la probabilité pour que le premier tirage ayant donné un numéro multiple de 2 soit le tirage de rang n ?

EXERCICE N°5

On considère les deux fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1 + 2 \ln x}{x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

On désigne respectivement par C et H les courbes représentatives de f et g dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

- 1) Étudier les variations de f .

- 2) Déterminer les limites de f aux bornes $] 0 , + \infty [$. Préciser les droites asymptotes à C .
- 3) Étudier la position de C par rapport à l'axe des abscisses, et donner une équation de la tangente à C au point d'intersection de C avec l'axe des abscisses.
- 4) Tracer C dans un repère orthonormé d'unité 4 cm (ou 4 carreaux de la copie).
- 5) Démontrer que la position relative des courbes C et H peut se déduire du signe de :
 $h(x) = 1 + 2 \ln x - x$.
- 6) En utilisant les variations de la fonction h , prouver que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $] 0 , 2[$ et $] 2 , + \infty [$. On note α la solution appartenant à l'intervalle $] 2 , + \infty [$; justifier l'encadrement $3 < \alpha < 4$.
- 7) Préciser le signe de $h(x)$ selon les valeurs de x et conclure sur la position relative des courbes C et H .

www.devenez-fonctionnaire.fr www.devenez-fonctionnaire.fr www.devenez-fonctionnaire.fr...