

UN OU PLUSIEURS PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

www.devenez-fonctionnaire.fr www.devenez-fonctionnaire.fr www.devenez-fonctionnaire.fr...

Les candidats sont autorisés à utiliser les matériels et documents suivants :

- calculatrices électroniques à fonctionnement autonome, sans imprimante, à entrée unique par clavier ;
- règles à calcul ;
- tables de logarithme ne comportant aucune formule algébrique, géométrique ou trigonométrique.

Les cinq exercices sont à traiter. Les candidats devront justifier tous leurs résultats et détailler leurs calculs pour y parvenir.

EXERCICE N°1

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (1 - x^2) e^{-x}$

On notera C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. (Unité graphique : 2 cm)

1. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$

b) Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = e^{-x} - \frac{x^2}{e^x}$

En déduire la limite de f en $+\infty$

Quelle en est la conséquence graphique ?

c) f' désignant la fonction dérivée de f , montrer que pour tout réel x :

$$f'(x) = (x^2 - 2x - 1) e^{-x}$$

En déduire le sens de la variation de f

d) Etablir le tableau de variation de f

2. a) Déterminer les coordonnées des points communs à C et à l'axe des abscisses

b) Tracer la courbe C

3. On considère les intégrales suivantes :

$$J = \int_0^1 x e^{-x} dx \quad \text{et} \quad I = \int_0^1 f(x) dx$$

a) On considère la fonction H définie sur \mathbb{R} par $H(x) = (-x - 1) e^{-x}$

Déterminer H' la dérivée de H , en déduire le calcul de J .

b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $I = 1 - 2J$.

Calculer I .

c) Déterminer l'aire en cm^2 de l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; y)$ telles que :

$$0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)$$

On en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

EXERCICE N°2

www.devenez-fonctionnaire.fr www.devenez-fonctionnaire.fr www.devenez-fonctionnaire.fr...

Une pisciculture dispose de deux bassins B_1 et B_2 :

B_1 contient 7 truites et 3 carpes,

B_2 contient 5 truites et 2 carpes.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Dans cette question, on ne s'intéresse qu'au bassin B_1 . On extrait simultanément et au hasard, 3 poissons de ce bassin et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de carpes obtenues.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance mathématique de X .

2. On choisit maintenant un des deux bassins au hasard et, avec une égale probabilité de choisir l'une ou l'autre espèce, on en extrait, toujours au hasard, un poisson.

a) Calculer la probabilité :

- pour que ce soit une truite et qu'elle provienne du bassin B_1 ;

- pour que ce soit une truite et qu'elle provienne du bassin B_2 .

b) En déduire que la probabilité d'extraire une truite est $\frac{99}{140}$.

c) On a extrait une truite.

Quelle est la probabilité qu'elle provienne du bassin B_1 ?

N.B. : Tous les résultats de cet exercice seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

EXERCICE N°3

On jette 3 fois une pièce de monnaie mal équilibrée telle que :

$$P(F) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad P(P) = \frac{1}{4} \quad (P = \text{pile} ; F = \text{face})$$

Soit X la variable aléatoire représentant le plus grand nombre de résultats « face » consécutifs.

Calculer la loi de probabilité, l'espérance mathématique et la variance de la variable X .

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE N°4

M. DUPONT désire acheter une automobile qui, au 1^{er} juillet 2000, coûte 90 000 F.

N'ayant à sa disposition que 77 000 F et ne voulant pas prendre de crédit, il décide de placer la somme de 77 000 F dont il dispose. Un organisme financier lui assure un placement, à intérêts composés, au taux annuel de 7%.

On se propose de calculer en quelle année, M. DUPONT pourra acheter la voiture dont il rêve.

Pour tout entier n , on note u_n , le capital dont dispose M. DUPONT au 1^{er} juillet de l'année $(2000 + n)$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer que la suite (u_n) , pour $n \in \mathbb{N}$, est une suite géométrique dont on précisera la raison. Exprimer u_n en fonction de n .
3. On admet que le prix de l'automobile que veut acheter M. DUPONT augmente régulièrement de 3% au 1^{er} juillet de chaque année. Pour tout entier n , on note v_n le prix de l'automobile au 1^{er} juillet de l'année $(2000 + n)$.
Exprimer v_n en fonction de n .
4. Calculer, à partir de quelle année, M. DUPONT pourra acheter cette voiture. (On pourra utiliser la fonction logarithme népérien.)

EXERCICE N°5

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 6x^2 - 6x - 5$

1. Déterminer la primitive de f qui s'annule en $x = 1$.
2. Soit $F(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$.
 - a) Factoriser $F(x)$.
 - b) En déduire les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $F(x) = 0$, puis de l'inéquation $F(x) \leq 0$.
3. En utilisant un changement de variable, résoudre dans \mathbb{R} :
 - a) $2e^{3x} - 3e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$.
 - b) $2e^{3x} - 3e^{2x} - 5e^x + 6 \leq 0$.