

CONCOURS EXTERNE  
POUR L'EMPLOI DE CONTRÔLEUR STAGIAIRE DU TRÉSOR PUBLIC

ANNÉE 1999

ÉPREUVE N° 3 A OPTION

*Durée : 3 heures - Coefficient : 4*

[www.devenez-fonctionnaire.fr](http://www.devenez-fonctionnaire.fr) [www.devenez-fonctionnaire.fr](http://www.devenez-fonctionnaire.fr) [www.devenez-fonctionnaire.fr](http://www.devenez-fonctionnaire.fr)...

UN OU PLUSIEURS PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

PAGE 2

*Toute note inférieure à 6/20 est ELIMINATOIRE.*

Le candidat traitera celui des trois sujets ci-après qui correspond à l'option qu'il a choisie lors de son inscription au concours : **CE CHOIX NE PEUT PAS ÊTRE MODIFIÉ.**

**TRES IMPORTANT** : Sous peine d'annulation de leur copie, les candidats ne doivent porter aucun signe distinctif (nom, prénom, lieu, etc.) sur la partie réservée à la rédaction.

**Tournez la page S.V.P.**

## UN OU PLUSIEURS PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

-----

Les candidats sont autorisés à utiliser les matériels et documents suivants :

- calculatrices électroniques à fonctionnement autonome, sans imprimante, à entrée unique par clavier ;
- règles à calcul ;
- tables de logarithme ne comportant aucune formule algébrique, géométrique ou trigonométrique.

***Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats devront justifier tous leurs résultats et détailler leurs calculs pour y parvenir.***

---

[www.devenez-fonctionnaire.fr](http://www.devenez-fonctionnaire.fr) [www.devenez-fonctionnaire.fr](http://www.devenez-fonctionnaire.fr) **EXERCICE N°1** [www.devenez-fonctionnaire.fr](http://www.devenez-fonctionnaire.fr)...

1 - Le code antivol d'un autoradio est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre pouvant prendre l'une des dix valeurs 0, 1, ...9.

- a) Quel est le nombre de codes possibles ?
- b) Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffres distincts ?

2 - Après une coupure d'alimentation électrique, le propriétaire doit réintroduire le code pour pouvoir utiliser son autoradio.

Il sait que les quatre chiffres de son code sont 1, 9, 9 et 5, mais il a oublié l'ordre de ces chiffres.

- a) Combien de codes différents peut-il composer avec ces 4 chiffres ?

Si le premier code introduit n'est pas le bon, le propriétaire doit attendre 2 minutes avant de pouvoir tenter un second essai ; le délai d'attente entre le second et le troisième essai est de 4 minutes, entre le troisième et le quatrième essai, il est de 8 minutes... (le délai d'attente double entre deux essais consécutifs).

- b) Combien de codes le propriétaire peut-il introduire au maximum en 24 heures ?

### EXERCICE N°2

[www.devenez-fonctionnaire.fr](http://www.devenez-fonctionnaire.fr) [www.devenez-fonctionnaire.fr](http://www.devenez-fonctionnaire.fr) [www.devenez-fonctionnaire.fr](http://www.devenez-fonctionnaire.fr)...

Robin joue avec un jeu électronique.

Une partie consiste en un duel entre Robin et un des trois monstres  $M_1$ ,  $M_2$ , ou  $M_3$ , choisi par la machine.

Le jeu est programmé de telle sorte que, pour chaque partie, le monstre  $M_1$  a une chance sur deux d'apparaître, les deux autres monstres ayant la même probabilité d'apparition.

On admet que si Robin combat le monstre  $M_1$ , la probabilité pour qu'il gagne est 0,3 ; s'il combat le monstre  $M_2$ , la probabilité pour qu'il gagne est 0,4 ; et s'il combat le monstre  $M_3$ , il perd à coup sûr.

- 1 - Calculer les probabilités d'apparition des trois monstres.
- 2 - Montrer que la probabilité pour que Robin gagne la partie est de  $\frac{1}{4}$ .
- 3 - Sachant que Robin a perdu la partie, quelles sont les probabilités pour :
  - a) qu'il ait joué contre le monstre  $M_1$  ?
  - b) qu'il ait joué contre le monstre  $M_3$  ?
- 4 - Robin joue consécutivement quatre parties. On admet que les parties sont jouées indépendamment. Calculer les probabilités pour que :
  - a) Robin gagne au moins une partie.
  - b) Robin gagne exactement une partie.

### EXERCICE N°3

Soit la suite numérique  $U_n$  définie pour  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$U_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$$

- 1) Calculer  $U_1$
- 2) Calculer  $U_2$
- 3) Calculer  $U_n$  pour  $n \geq 2$
- 4) Démontrer que  $U_n = e - \sum_{t=0}^{t=n} \frac{1}{t!}$
- 5) Quelle est la limite de la suite  $U_n$  quand  $n \rightarrow \infty$  pour  $x \in (0, 1)$  ?

**Tournez la page S.V.P.**

### EXERCICE N°4

A) On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par

$$f(x) = e^{\left(-\frac{x^2}{8} + x\right)}$$

et on note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique = 1 cm)

- 1 - Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition ;
- 2 -  $f'$  étant la fonction dérivée de  $f$ , déterminer  $f'(x)$ , étudier son signe, en déduire le tableau de variation de  $f$ .
- 3 - Tracer (C).

B) Une action est introduite en bourse à l'instant  $t = 0$ . On suppose que la cote de l'action, exprimée en centaines de francs, est  $g(t) = f(t) + e$ , où  $t$  (exprimé en mois) appartient à l'intervalle  $[0 ; 12]$  ( $e$  est le réel tel que  $e = 1$ ).

- 1 - Exprimer  $g(t)$  en fonction de  $t$ .
- 2 - En utilisant les résultats de la partie A, donner le tableau de variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0 ; 12]$ .
- 3 - A quel instant la cote de l'action est-elle maximale ?  
Donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de cette cote.
- 4 - Un gestionnaire prudent décide de revendre son action lorsque la cote de celle-ci retombe en-dessous de sa valeur initiale.
  - a) Déterminer la valeur exacte de la cote de l'action à l'instant  $t = 0$ .
  - b) Pour quelle autre valeur de  $t$  l'action retrouve-t-elle cette cote ? Justifier cette réponse par le calcul.
- 5 - Donner une valeur approchée de  $g(11)$ .

En déduire que pour tout  $t$  tel que  $11 \leq t \leq 12$ , la cote de l'action est strictement inférieure à 275 F.