Correction du sujet de mathématiques du concours externe du trésor public de 2011

Exercice 1 :

1)$\overrightarrow{AH}(-2;-3;4)$donc $AH=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+4^2}=\sqrt{4+9+16}=\sqrt{29}$

2) M$\in$(P) équivaut à $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{AH}=0$

M$\in$(P) équivaut à $(x-1)\times(-2)+(y+1)\times(-3)$=0

M$\in$(P) équivaut à $-2x-3y+4z-13=0$ équation du plan (P).

On peut aussi utiliser la propriété liant les coordonnées du vecteur normal et l'équation du plan, puis remplacer les coordonnées du point dans l'équation pour trouver la constante – 13.

3)a) On remplace x , y et z dans l'équation du plan (P) par les coordonnées de B :

$-2\times(-6)-3\times1+4\times1-13=12-3+4-13=0$ donc B$\in$(P)

De même : $-2\times4-3\times(-3)+4\times3-13=-8+9+12-13=0$ donc C$\in$(P)

$-2\times(-1)-3\times(-5)+4\times(-1)-13=2+15-4-13=0$ donc D $\in$(P)

b)$\overrightarrow{BC}(10;-4;2)$ et $\overrightarrow{BD}(5;-6;-2)$

donc $\overrightarrow{BC}$^$\overrightarrow{BD}$$(-4\times(-2)-(-6)\times2;2\times5-(-2)\times10;10\times(-6)-5\times(-4))$

donc $\overrightarrow{BC}$^$\overrightarrow{BD}$(20 ;30 ;-40)

Remarque : le vecteur normal au plan(P) est $\vec{n}(-2;-3;4)$et on a $\overrightarrow{BC}$^$\overrightarrow{BD}$=-10 $\vec{n}$ et il est logique qu'ils soient colinéaires car ils sont tous les deux orthogonaux au plan (P).

c) $\overrightarrow{AB}(-9;-1;2)$ et $\overrightarrow{AC}(1;-5;4)$ donc $\overrightarrow{AB}$^$\overrightarrow{AC}(6;38;46)$

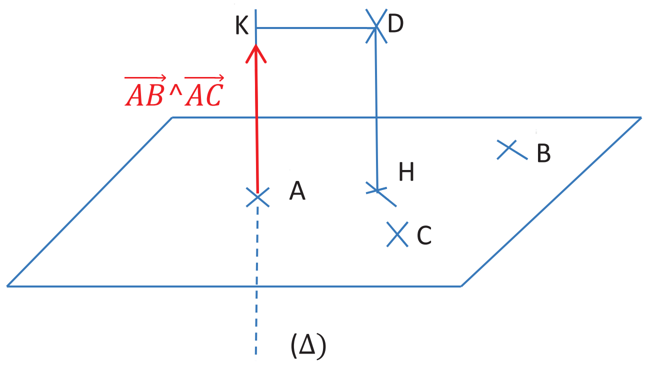
$\overrightarrow{AD}(-4;-7;0)$ donc ($\overrightarrow{AB}$^$\overrightarrow{AC}$).$\overrightarrow{AD}$= $6\times(-4)+38\times(-7)+0=-24-266=-290$

d) Soit H le projeté orthogonal de D sur le plan (P), alors **DH est la distance de D au plan (P)**.

Soit K le projeté orthogonal de D sur la droite (Δ), droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$^$\overrightarrow{AC}$.

Comme $\overrightarrow{AB}$^$\overrightarrow{AC}$ est orthogonal à(P), la droite (Δ)est perpendiculaire à (P) en A, le vecteur $\overrightarrow{AK}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$^$\overrightarrow{AC}$ et en plus **AK =DH** (car AKDH a 3 angles droits c'est-à-dire que c'est un rectangle et ses côtés opposés sont de même longueur).

Remarque : un petit dessin du plan (P) et des points A, D, H et K et des vecteurs aide à la compréhension du problème.



D'après le c) : ($\overrightarrow{AB}$^$\overrightarrow{AC}$).$\overrightarrow{AD}$ = - 290 ⇔ ($\overrightarrow{AB}$^$\overrightarrow{AC}$).($\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KD}$)=- 290

$$(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD} = -290 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AK}+(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{KD}=-290$$

$(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{KD}=0$ car ils sont orthogonaux et on prend la norme de l'égalité précédente pour obtenir

$$AK = \frac{|-290|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|} = \frac{290}{\sqrt{6^2+38^2+46^2}} = \frac{290}{\sqrt{899}} = \frac{290\sqrt{899}}{899} = \frac{5\sqrt{899}}{31}$$

<u>Exercice 2 :</u>

<u>Partie I</u>

1) a) g est continue et dérivable sur [0 ;+ ∞ [comme somme de fonctions continues et dérivables sur [0 ;+ ∞ [.
   Pour tout x de [0 ;+ ∞ [: $g'(x) = e^x - 1$
   $x > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur]0 ;+ ∞ [.
   Comme $e^0 = 1$, on a $e^x > 1$ et donc $g'(x) > 0$.
   Comme $g'(x) > 0$ pour tout x > 0, la fonction g est strictement croissante sur]0 ; +∞ [et aussi sur [0 ;+ ∞ [.
   b) $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$
   Comme g est continue et strictement croissante sur]0 ; +∞ [, pour tout $x > 0$ on a $g(x) > g(0)$ c'est-à-dire $g(x) > 0$.

2) a) h est continue et dérivable sur [0 ;+ ∞ [comme somme et produit de fonctions continues et dérivables sur [0 ;+ ∞ [.
   Pour tout x de [0 ;+ ∞ [: $h'(x) = -e^x + (2-x)e^x = e^x(-1+2-x) = e^x(1-x)$

x	0		1		+∞
h'(x)		+	0	-	
h(x)			e-1		
	1				-∞

$h(0) = (2-0)e^0 - 1 = 2 - 1 = 1$; $h(1) = (2-1)e^1 - 1 = e - 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}$ 2-x = - ∞ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$=+∞ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$

b) La fonction h est définie, continue et strictement décroissante sur]1 ; +∞[.

e-1$>$ 0 et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$ donc 0 ∈] $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$; e-1]

La fonction h réalise donc une bijection de]1 ; +∞[sur] $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$; e-1[et l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α avec α ∈]1 ; +∞[soit α > 1.

c) Avec la calculatrice : $h(1{,}84) = 0{,}007$ à 10^{-3} près et $h(1{,}85) = -0{,}046$ à 10^{-3} près

Comme 0 ∈]h(1,85) ;h(1,84)[alors α ∈]1,84 ;1,85[soit 1,84< α<1,85.

d) Sur [0 ;1], h(x)>1>0 (voir 2)a))

Sur[1 ; α[, h(x) >0 puis h(α) = 0 et enfin sur] α ; +∞[, h(x)<0.

Partie II

1)a) Soit k la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $k(x)= e^x - x$

k est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $k'(x) = e^x - 1$ et d'après la partie I 1)a) pour tout $x > 0$: $e^x>1$

et pour x=0 $e^x=1$ et $k'(0)=0$

Donc pour tout $x\in]0\,;+\infty[$, $k'(x)>0$ et k est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et k(0)=1

Donc pour tout $x\in[0\,;+\infty[$, $k(x) \geq 1$

Donc pour tout $x\in[0\,;+\infty[$, $k(x) \neq 0$, f(x) existe et f est définie sur $[0\,;+\infty[$.

b) On factorise, puis on simplifie, par $e^x \neq 0$ au numérateur et au dénominateur dans f(x),donc :

$$f(x) = \frac{1-\frac{1}{e^x}}{1-\frac{x}{e^x}} = \frac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ (croissance comparée) donc, avec l'expression précédente de f(x), $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1-0}{1-0} = 1$.Cela signifie que la courbe *C* admet une asymptote horizontale en $+\infty$, d'équation y=1.

c) La fonction f est définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $[0\,;+\infty[$.

Pour tout x ≥0, on a : $f'(x) = \frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2} = \frac{(e^x)^2-xe^x-(e^x)^2+2e^x-1}{(e^x-x)^2} = \frac{(2-x)e^x-1}{(e^x-x)^2} = \frac{h(x)}{(e^x-x)^2}$

d) Avec la partie I 2)d) on a le signe de f'(x) car $(e^x-x)^2 > 0$ pour tout x≥0

x	0		α		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	f(α)	↘	1

2)a) $f(x) - x = \frac{e^x-1}{e^x-x} - x = \frac{e^x-1-x(e^x-x)}{e^x-x} = \frac{e^x-1-xe^x+x^2}{e^x-x}$ pour tout x ≥0.

Pour tout x ≥0 : $(1-x)g(x) = (1-x)(\,e^x - x - 1) = (\,e^x - x - 1) - x(\,e^x - x - 1)$

Donc , pour tout x ≥0 : $(1-x)g(x) = e^x - x - 1 - xe^x + x^2 + x = e^x - 1 - xe^x + x^2$

D'où, pour tout x ≥0 : $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$

b)D'après la partie I 1)b) : pour tout $x > 0$ on a $g(x) > 0$ et $g(0)=0$

De plus, $e^x - x > 0$ pour tout x ≥0 (voir partie II 1)a)) donc on a :

$f(x) - x = 0$ pour x= 0 et x=1, c'est-à-dire que *C* et *D* sont sécantes en O(0 ;0) et en A(1 ;1).

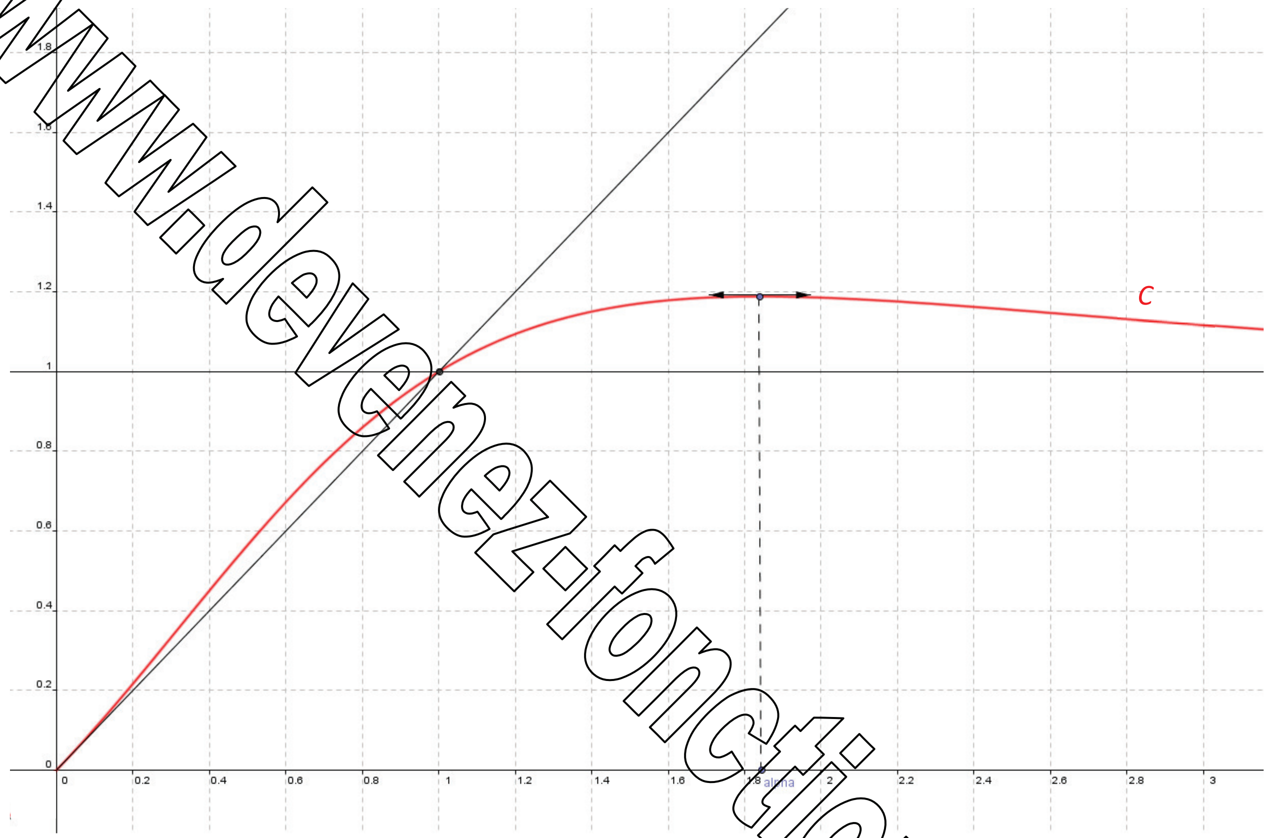
$f(x) - x > 0$ pour tout x de]0 ;1[,c'est-à-dire que *C* est au-dessus de *D* sur]0 ;1[

$f(x) - x < 0$ pour tout x de]1 ; + ∞ [,c'est-à-dire que *C* est en dessous de *D* sur] 1 ; + ∞ [.

3) a) L'équation de la tangente à *C* au point d'abscisse 0 est : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f'(0) = \frac{h(0)}{(e^0-0)^2} = \frac{1}{1} = 1$ et f(0)=0 donc la tangente à *C* au point d'abscisse 0 est *D*.

b) Tracé de C , de D et de la droite Δ.



Partie III.

1) Pour tout x ≥0 : $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x-x}$ qui est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec u(x)= $e^x - x$ et u(x)>0 pour tout x ≥0.

Donc une primitive de f est définie sur [0 ;+ ∞[par F(x)=$\ln(e^x - x)$.

U_n=$\int_0^n [f(x)-1]\mathrm{dx} = [\ln(e^x - x) - x]_0^n = [\ln(e^n - n) - n] - [ln1 - 0] = \ln(e^n - n) - n.$

2) $-U_1$ = - $\int_0^1 [f(x)-1]\mathrm{dx} = \int_0^1 [1-f(x)]dx$ et $1 - f(x) = 1 - \frac{e^x-1}{e^x-x} = \frac{e^x-x-e^x+1}{e^x-x} = \frac{1-x}{e^x-x}$ qui est positif pour tout x de [0 ;1].

Donc $-U_1$ est la mesure de l'aire délimitée par les droites d'équation x=0, x=1, y=1 et la courbe C. L'aire est placée entre Δ et C.

3) U_n = $\ln(e^n - n) - n = \ln(e^n - n) - \ln(e^n) = \ln\left(\frac{e^n-n}{e^n}\right) = \ln(1 - \frac{n}{e^n})$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0$ (croissance comparée) donc $\lim_{n\to+\infty}$ U_n = ln1=0.

4) $U_n - U_1$ =$\int_0^n [f(x)-1]\mathrm{dx}$ - $\int_0^1 [f(x)-1]\mathrm{dx} = \int_1^n [f(x)-1]\mathrm{dx}$ avec $f(x) - 1 \geq 0$ pour tout x≥1.

Donc $U_n - U_1$ est la mesure de l'aire délimitée par les droites d'équation x=1, x=n, y=1 et la courbe C.

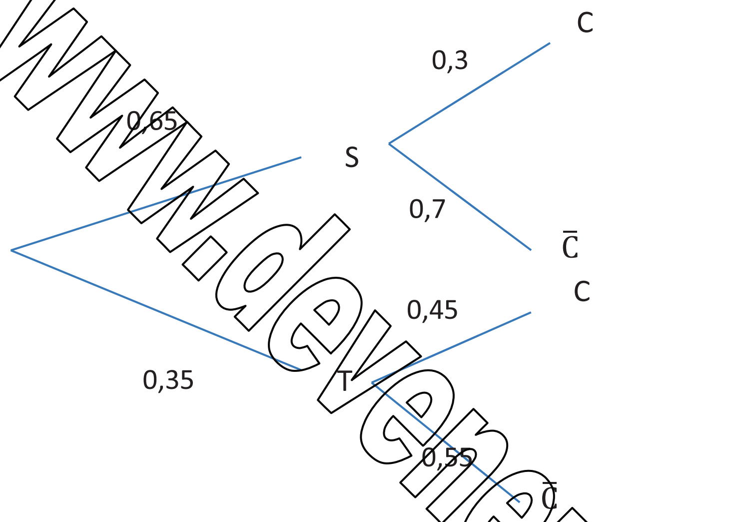
$\lim_{n\to+\infty}$ U_n = 0 donc $\lim_{n\to+\infty}$ $U_n - U_1$= $-U_1$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_1^n [f(x)-1]\mathrm{dx} = -$ U_1.

Donc la mesure de l'aire délimitée par les droites d'équation x=0, x=1, y=1 et la courbe C est égale à la mesure de l'aire délimitée par les droites d'équation x=1, y=1 et la courbe C.

Exercice 3 :

On peut construire un arbre de probabilité (à faire au brouillon ou sur la copie):

Lieu de restauration type de repas



1) P(S) =$\frac{65}{100} = 0{,}65$;   P(C/S) = $\frac{30}{100} = 0{,}3$ et P(C/T)=$\frac{45}{100} = 0{,}45$

2) P(S∩ C)=P(C/S)×P(S)=0,3×0,65=0,195

3)P(C)= P(C/S) ×P(S) + P(C/T) ×P(T) car les événements S et T sont contraires (et donc disjoints ou incompatibles)

Donc P(C)= 0,195+0,45×0,35=0,195 + 0,1575 = 0,3525.

4)P(S/C) = $\frac{P(S\cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}195}{0{,}3525} = \frac{1950}{3525} = \frac{26}{47}$

5) Le choix des factures est fait indépendamment les unes des autres (et au hasard) assimilé à un tirage avec remise donc on peut se placer dans le cas de la loi binomiale (tirage de Bernoulli) avec les deux éventualités C et $\bar{C}$ avec P(C)= 0,3525 et P($\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0.3525 = 0{,}6475$

La probabilité qu'aucune des factures soit des « repas pris à la carte » est donnée par :

$C_4^0 \times 0{,}3525^0 \times 0{,}6475^4 = 0{,}176$ arrondie à 10^{-3} près.

Exercice 4:

1)

	Gymnastique	Vélo	Course à pied	total
Hommes	60 :2=30	60-(30+6)=24	0,1×60=6	150-90=60
femmes	$0{,}2\times 90 = 18$	90-(18+27)=45	27	90
total	30+18=48	24+45=69	27+6=33	150

Vérification :48+69+33 = 150

2)a) P($\bar{A}$)=$\frac{60}{150} = 0{,}4$

b) P(N/A) = $\frac{27}{90} = 0{,}3$

c) P(A$\cap T) = \frac{45}{150}$=0,3

3)P(M) = $\frac{48}{150} = 0{,}32$

4) $\frac{2}{3} \times 48 = 32$ mais il n'y a pas 32 hommes qui ont choisi gymnastique car il y en a 30.Donc le directeur du club a tort.

Autre méthode : $\frac{30}{48} = \frac{5}{8} \neq \frac{2}{3}$ car $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$ et $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$.

5) On a un tirage au hasard et avec remise donc on peut se placer dans le cas de la loi binomiale avec les deux éventualités M et $\overline{M}$ avec P(M)=0,32 et P($\overline{M}$) =1-0,32=0,68.

La probabilité qu'une seule personne ait choisi la gymnastique est $C_3^1 \times 0{,}32^1 \times 0{,}68^2$=0,44 au centième et arrondie.