

## RÉSOLUTION D'UN OU PLUSIEURS PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

Les candidats sont autorisés à utiliser les documents et matériels suivants :

- calculatrices électroniques, y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, à entrée unique par clavier, sans imprimante ;
- règles de calcul ;
- tables de logarithme ne comportant aucune formule algébrique, géométrique ou trigonométrique.

Les quatre exercices sont à traiter.

### EXERCICE N°1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on donne les points A (3 ; 2 ; -1) et H (1 ; -1 ; 3).

- 1°) Calculer la longueur AH.
- 2°) Déterminer une équation du plan (P) passant par H et orthogonal à la droite (AH).
- 3°) On donne les points B (-6 ; 1 ; +1), C (4 ; -3 ; 3) et D (-1 ; -5 ; -1).
  - a) Démontrer que les points B, C et D appartiennent au plan (P).
  - b) Calculer les coordonnées du produit vectoriel  $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$ .
  - c) Calculer  $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$ .
  - d) En déduire la distance du point D au plan (ABC).

### EXERCICE N°2

L'objet de ce problème est :

- d'étudier la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$  ;
- de justifier rigoureusement le tracé de sa courbe représentative  $C$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , unité graphique 5 cm ;
- de détailler enfin certaines propriétés d'une suite de nombres réels construite à partir de  $f$ .

### Partie I

- 1°) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $g(x) = e^x - x - 1$ 
  - a) Montrer que, pour tout  $x > 0$ , on a  $g'(x) > 0$ . En déduire le sens de variation de  $g$  sur  $[0 ; +\infty[$ .
  - b) Calculer  $g(0)$ . En déduire que, pour tout  $x > 0$ , on a  $g(x) > 0$ .
- 2°) Soit  $h$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $h(x) = (2 - x) e^x - 1$ 
  - a) Étudier la fonction  $h$  et dresser son tableau de variation.
  - b) Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution et une seule  $\alpha$  et que l'on a  $\alpha > 1$ .
  - c) Vérifier la double inégalité  $1,84 < \alpha < 1,85$ .
  - d) Préciser, suivant les valeurs du nombre réel  $x \geq 0$ , le signe de  $h(x)$ .

## Partie II

Étude de la fonction  $f$  et tracé de la courbe  $C$ .

1°) a) Justifier que  $f$  est définie en tout point de  $[0 ; +\infty[$ .

b) Montrer que, pour tout  $x \geq 0$ , on peut écrire  $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$ .

En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

Interpréter géométriquement, relativement à  $C$ , le résultat obtenu.

c) Montrer que, pour tout  $x \geq 0$ ,  $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}$ .

d) Étudier la fonction  $f$  et dresser son tableau de variation.

2°) a) Montrer que, pour tout  $x \geq 0$ ,  $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$ .

b) En déduire, suivant les valeurs du nombre réel  $x \geq 0$ , la position de la courbe  $C$  par rapport à la droite  $D$  d'équation  $y = x$ .

3°) a) Préciser la tangente au point de  $C$  d'abscisse 0.

b) Tracer  $C$ , en faisant figurer sur le dessin la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 1$  et tous les éléments obtenus au cours de l'étude.

## Partie III

Étude de la suite  $U_n = \int_0^n [f(x) - 1] dx$

1°) Déterminer une primitive de la fonction  $f$ . En déduire l'expression de  $U_n$  en fonction de  $n$ .

2°) Interpréter géométriquement le nombre réel  $-U_1$ .

3°) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  (on pourra utiliser l'égalité  $n = \ln(e^n)$ ).

4°) Interpréter géométriquement le nombre réel  $U_n - U_1$ , puis le résultat obtenu dans la question précédente.

## EXERCICE N°3

Un restaurant propose deux types de repas (à la carte ou au menu) et deux types d'installation (en salle ou en terrasse).

Au travers des facturations effectuées par le restaurant, on constate que :

- 65 % des repas ont lieu en salle ;
- 30 % des repas en salle concernent des plats servis à la carte ;
- 45 % des repas pris en terrasse relèvent de plats servis à la carte.

On choisit une facture au hasard et on note :

- S l'évènement « le repas a lieu en salle » ;
- C l'évènement « le repas est pris à la carte » ;
- T l'évènement contraire de S.



- 1°) En utilisant les données de l'énoncé, trouver les probabilités des 3 événements :
- S,
  - C sachant S,
  - C sachant T.
- 2°) Quelle est la probabilité qu'un repas ait lieu en salle et soit pris à la carte ?
- 3°) Montrer que la probabilité qu'un repas soit pris à la carte est de 0,3525.
- 4°) En déduire la probabilité qu'un repas à la carte soit pris en salle (résultat exact à donner sous forme d'une fraction irréductible).
- 5°) On choisit quatre factures au hasard et indépendamment les unes des autres et on s'intéresse au type de repas choisi. On admettra que le nombre de factures est suffisamment grand pour que le choix d'une facture soit assimilé à un tirage avec remise.
- Quelle est la probabilité que l'ensemble des factures ne concerne pas des « repas pris à la carte » (valeur décimale arrondie à  $10^{-3}$ ) ?

#### EXERCICE N°4

Dans un club de remise en forme, trois stages sont proposés aux femmes et aux hommes. Ils ont lieu dans la même plage horaire ; leurs thèmes sont : la gymnastique, le vélo et la course à pied.

150 personnes dont 90 femmes se sont inscrites à l'un de ces stages.

Parmi les 150 personnes inscrites, on relève que :

- la gymnastique a été choisie par la moitié des hommes et par 20 % des femmes ;
- 27 femmes ont opté pour la course à pied ainsi que 10 % des hommes.

1°) On appelle au hasard une personne qui s'est inscrite à un stage. On pourra utiliser les notations suivantes :

- A : l'événement « la personne appelée est une femme » ;
- M : l'événement « la personne appelée a choisi la gymnastique » ;
- T : l'événement « la personne appelée a choisi le vélo » ;
- N : l'événement « la personne appelée a choisi la course à pied ».

Recopier et compléter le tableau suivant de la répartition (en nombre) des activités exercées entre hommes et femmes :

				Total
Total				

- 2°) a) Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un homme ?
- b) Quelle est la probabilité que la personne appelée ait choisi la course à pied sachant que c'est une femme ?
- c) Quelle est la probabilité que la personne appelée soit une femme ayant choisi le vélo ?
- 3°) Montrer que la probabilité que la personne appelée ait choisi la gymnastique est de 0,32.
- 4°) Le directeur du club désigne une personne ayant choisi la gymnastique. Il dit qu'il y a deux chances sur trois pour que ce soit un homme. A-t-il raison ? Justifier votre réponse.
- 5°) On choisit, parmi les personnes qui désirent suivre un stage, trois personnes au hasard. On assimile ce choix à un tirage avec remise. Quelle est la probabilité qu'une seule personne ait choisi la gymnastique (on donnera une valeur arrondie au centième) ?