Exercice ① $f(x) = \ln(1+e^x)$

1/ - (1) $\lim\limits_{x \to -\infty} 1+e^x = 1$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

(2) $\lim\limits_{X \to 1} \ln X = 1$

(1) et (2) permettent d'affirmer que $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$ par composée de limites

- $\lim\limits_{x \to +\infty} 1+e^x = +\infty$ (3)

$\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$ (4)

(3) et (4) permettent d'affirmer que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ par composée de limites

2/ f est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables. On calcule $f'(x)$ et on étudie son signe pour déterminer les variations de $f(x)$.

f est de la forme $\ln u$ avec $u(x) = 1+e^x$

f' est donc de la forme $\frac{u'}{u}$

$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ $e^x > 0$ pour $\forall x$ d'où $e^x + 1 > 0$ pour $\forall x$

$f'(x) > 0$ pour $\forall x \Rightarrow$ <u>la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$</u>

3/ $f(x) = \ln(1+e^x) = \ln\left(e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)\right)$

$f(x) = \ln e^x + \ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)$ car $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

$\boxed{f(x) = x + \ln(e^{-x}+1)}$ car $\ln e^x = x$ et $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$

4/ Si (Δ) est asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$, on doit avoir $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$

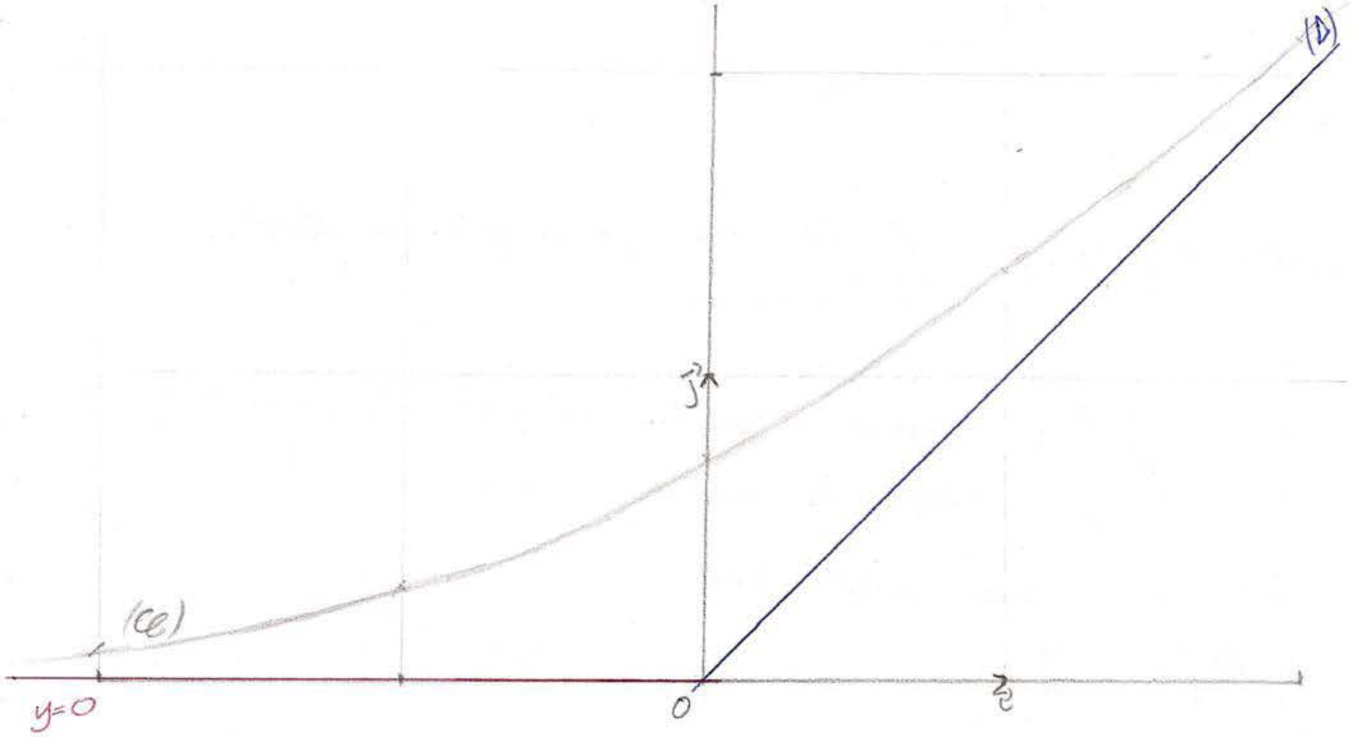
$f(x) - x = x + \ln(e^{-x}+1) - x = \ln(e^{-x}+1)$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} + 1 = 1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

(6) $\lim\limits_{X \to 1} \ln X = 0$

(5) et (6) permettent d'affirmer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(e^{-x} + 1) = 0$ par composée de limites

La droite (Δ) est bien asymptote à (𝒞) au voisinage de $+\infty$



Exercice 2

Prix du menu avec TVA à 19,6 % : 12,70 €

or Prix HT × 1,196 = prix TTC

$\text{Prix HT} = \dfrac{\text{Prix TTC}}{1{,}196} = \dfrac{12{,}70}{1{,}196} \approx 10{,}62$ € à 10^{-2} par excès

Le prix HT du menu proposé est donc de 10,62 €. Ajoutons la nouvelle TVA à ce prix pour connaître le nouveau tarif du menu.

$10{,}62 \times 1{,}055 = 11{,}20$ €

Le nouveau tarif du menu est 11,20 €

Exercice 3 (u_n) $\begin{cases} u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 3 \end{cases}$

(u_n) est une suite du second ordre. Il faut étudier son équation caractéristique pour la définir de manière explicite

$$u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$$

donne (E) : $X^2 - 3X + 2 = 0$

On calcule le discriminant de (E) :

$$\Delta_{(E)} = (-3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1 \qquad \Delta_{(E)} > 0 \Rightarrow 2 \text{ racines réelles}$$

- $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{1}}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$
- $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{1}}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

u_n peut donc s'écrire $u_n = a\,2^n + b\,1^n$ $a, b \in \mathbb{R}$

On sait de plus que $u_0 = 1$ et $u_1 = 3$ d'où

$$\left.\begin{aligned} u_0 = 1 &\iff a2^0 + b1^0 = 1 \iff a + b = 1 \\ u_1 = 3 &\iff a2^1 + b1^1 = 3 \iff 2a + b = 3 \end{aligned}\right\} (S)$$

$$(S) \iff \begin{cases} a = 1 - b \\ 2(1-b) + b = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1-b \\ 2 - 2b + b = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 - b \\ b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 - (-1) = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

(u_n) s'écrit donc $u_n = 2(2)^n - 1(1)^n$

$$\boxed{u_n = 2^{n+1} - 1}$$

On vérifie avec les premiers termes de (u_n). Ça fonctionne ...

N.B. : En trouvant l'expression explicite de (u_n) à partir de ses premiers termes, on pouvait démontrer la propriété par récurrence